UYA8RX

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR

EDITAL N° 377 DE 25/05/2022, PUBLICADO NO DOU N° 102 DE 31/05/2022

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS – SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS – VAGA MC-024

QUESTÕES - PROVA ESCRITA

Conforme o Inciso III do Artigo 35 da Resolução n° 15/2020 do CONSUNI, seguem as questões da Prova Escrita:

1. **(PONTO 7)**

Considere a viga composta de uma matriz de resina com cabos de aço em seu interior, conforme mostrado na figura 1. O ensaio de tração da resina também é indicado na figura 1, assim como a disposição dos fios de aço na seção transversal da viga.

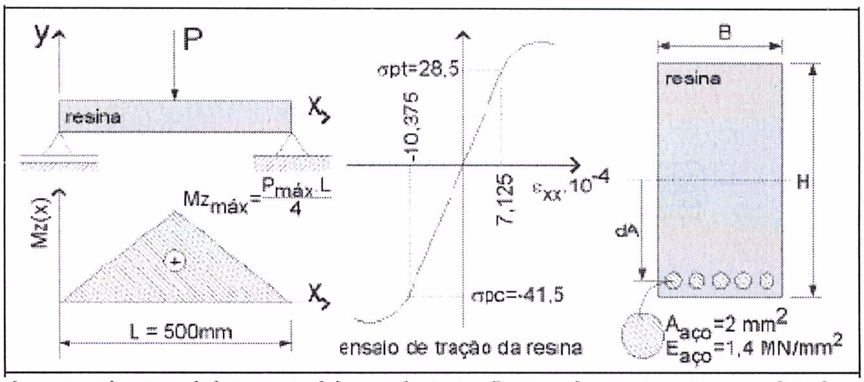


Figura 1 – Viga de múltiplos materiais, ensaio de tração da resina e cabos de aço no interior.

O objetivo do projeto é fazer com que haja um aproveitamento máximo das propriedades mecânicas da resina. Deseja-se que, quando ocorrer o carregamento máximo, a resina esteja simultaneamente sujeita à sua máxima tensão de compressão na parte superior (41,5 N/mm²), e à sua máxima tensão de tração na parte inferior (28,5 N/mm²).

N/mm² = MPa

Pode-se ajustar a posição da linha neutra para que essas duas tensões ocorram na resina, como mostrado na figura 2. Por meio da introdução de fios de aço pode-se levantar ou abaixar a posição da linha neutra.

Dados: **H** = 70 mm, **B** = 30 mm e **dA** = 32 mm, qual o número de fios de aço a serem adicionados para que esse requisito de projeto seja satisfeito? Nesta situação, qual a carga $\mathbf{P_{máx}}$ que a viga pode suportar, e quais são as tensões máximas atuantes no aço?

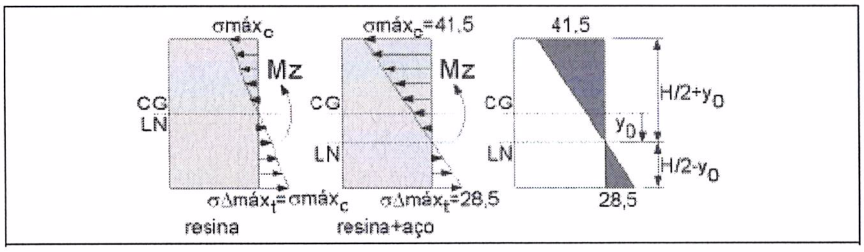


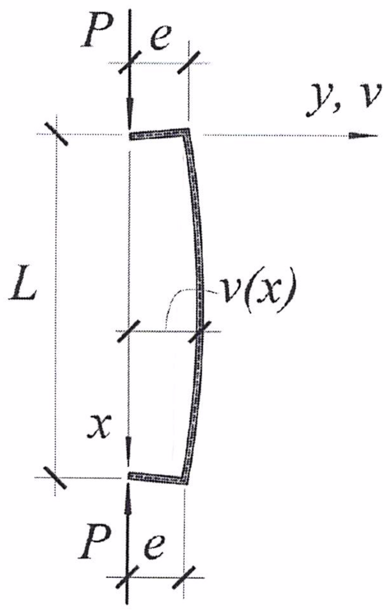
Figura 2 – Posição da linha neutra para que as tensões atuem simultaneamente.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Equações constitutivas no Estado Plano de Tensão

4. (PONTO 11)



Considere a coluna excentricamente comprimida da figura ee a teoria clássica das vigas. P é a força normal e e é o valor das excentricidades em ambas extremidades. A origem do sistema de coordenadas xy é definida no ponto de aplicação da força na extremidade superior. A posição da deformada elástica na direção y é representada por $v(x)$. O comprimento da coluna é L, o módulo de elasticidade do material é E e o momento de inércia da seção transversal da coluna é I.

Pede-se

estabelecer a equação diferencial da deformada $v(x)$ e a forma geral da solução,

determinar as constantes a partir de condições de contorno,

apresentar a expressão final da deformada $v(x)$, e

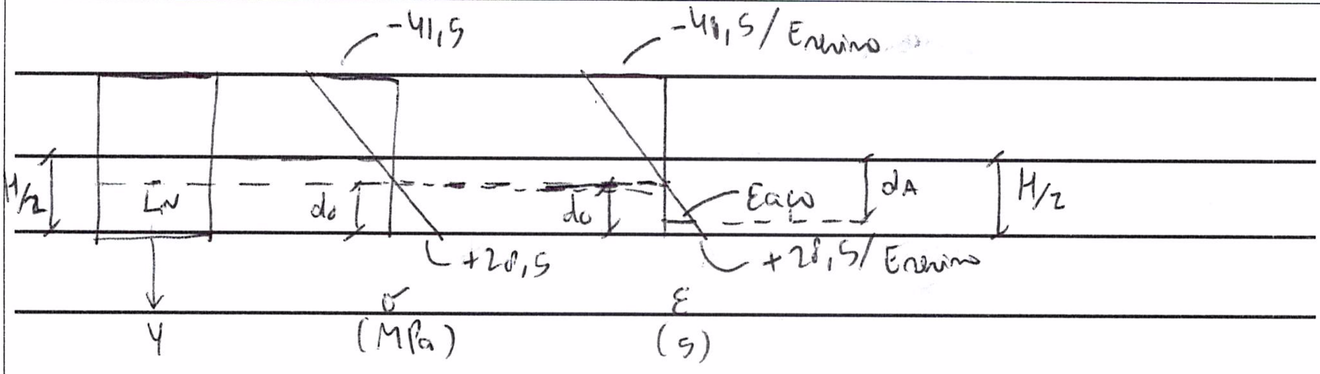
determinar a excentricidade $v(L/2)$, em $x = L/2$.

Sugestões: Podem ser adotadas outras convenções de sinais, mas considerando o momento fletor como $M = -\int_A \sigma y \, dA$ tem-se $d^2v/dx^2 = M/EI$ e $M(0) = M(L) = -Pe$.

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS
Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.	
Edital n° 377, de 25 de maio de 2022.	DOU n° 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	UYA8RX

RESPOSTA QUESTÃO 1



Altura da LN: $\dfrac{41,5}{(H-d_0)} = \dfrac{28,5}{d_0} \Rightarrow d_0 = 28,5$ mm
a partir da face inferior da viga

Deformação no aço: tração

$$\frac{\varepsilon_{aço}}{Y_{aço}} = \frac{\varepsilon_{resina}}{d_0}$$

dist. da LN às barras de aço ← $Y_{aço} = d_A - (H/2 - d_0) = 32 - (35 - 28,5) = 25,5$ mm

(supondo que d_A foi medido a partir da meia altura do aço)

$$\varepsilon_{aço} = \frac{Y_{aço} \cdot \varepsilon_{resina}}{d_0} = \frac{25,5}{28,5} \cdot \frac{28,5}{E_{resina}} = \frac{25,5}{E_{resina}}$$

$$E_{resina} = \frac{28,5}{7,125 \cdot 10^{-4}} = 40\ GPa = (40000\ N/mm^2)$$

40000 MPa

σ/ε do ensaio de tração

Politécnica UFRJ	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO ESCOLA POLITÉCNICA DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS
Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.	
Edital nº 377, de 25 de maio de 2022.	DOU nº 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	UYA8RX

RESPOSTA QUESTÃO CONTINUAÇÃO 1

Condição de equilíbrio no nó $\Sigma F = 0$

$$n \cdot \underbrace{E_{aço} \cdot \varepsilon_{aço}}_{\sigma_{aço}} \cdot A_{aço} + \int_{A_{resina}} \sigma \, dA = 0$$

n → qtde de barras

$\int_{A_{resina}} \sigma \, dA$ → Área dos triângulos

$$n \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 \cdot \frac{25{,}5}{40 \cdot 10^3} \cdot 2 + B \cdot (-41{,}5) \cdot \frac{(H - d_0)}{2} + \frac{B \cdot 28{,}5 \cdot 28{,}5}{2} = 0$$

$$n \cdot 1785 - 41{,}5 \cdot 30 \cdot \frac{(70 - 28{,}5)}{2} + \frac{28{,}5^2 \cdot 30}{2} = 0$$

$n = 7{,}65$ fios $\cong$ 8 fios//

Equilíbrio de momentos na seção $\Sigma M = PL/4$

$$n \cdot E_{aço} \cdot \varepsilon_{aço} \cdot A_{aço} \cdot y_{aço} + \int_{A_{resina}} \sigma \, y \, dA = PL/4$$

$$8 \cdot (1{,}4 \cdot 10^6) \cdot \frac{25{,}5}{40 \cdot 10^3} \cdot 2 \cdot 25{,}5 + \int_{-41{,}5}^{+28{,}5} y \cdot y \cdot B \cdot dy = PL/4$$

$(\sigma = y)$

$$364140 + 30 \int_{-41{,}5}^{+28{,}5} y^2 \, dy = P \cdot 5000/4$$

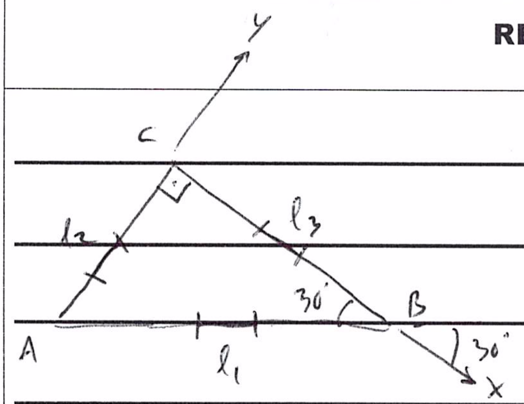
$$364140 + 30 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-41{,}5}^{+28{,}5} = P \cdot 5000/4 \Rightarrow P = 1{,}05 \text{ kN}//$$

termo de cisalhamento no aço foi desconsiderado por estar próximo à fibra inferior ($\tau = 0$)

termo normal no aço $\Rightarrow \sigma_{aço} = E \cdot \varepsilon_{aço} = 1{,}4 \cdot 10^6 \cdot \frac{25{,}5}{40 \cdot 10^3} = 892{,}5$ MPa//

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	U4A8RX

RESPOSTA QUESTÃO 2



$\varepsilon_x = \Delta l_3 / l_3 = -0{,}03/50 = -6 \cdot 10^{-4}$ st

$\varepsilon_y = \Delta l_2 / l_2 = +0{,}03/30 = 1 \cdot 10^{-3}$

$= 10 \cdot 10^{-4}$ st

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

Para $\theta = 30°$ $\quad \varepsilon_{x'x'} = \Delta l_1 / l_1 = +0{,}02/50 = +4 \cdot 10^{-4}$ st

Substituindo na expressão:

$$4 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}(-6+10) + \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}(-6-10) \cdot \cos 60° + \varepsilon_{xy} \cdot \operatorname{sen} 60°$$

$$2 \cdot \varepsilon_{xy} \cdot \operatorname{sen} 60° = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} - 10^{-4}(10-6) - 10^{-4}(-6-10) \cdot \cos 60°$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{12 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot \operatorname{sen} 60°} = +6{,}928 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Estado de deformação está definido com ε_x, ε_y e ε_{xy}

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	UYA8RX

RESPOSTA QUESTÃO CONTINUAÇÃO 2

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = \frac{70 \cdot 10^{-4}}{(1-0{,}3^2)} \cdot (-6 + 0{,}3 \cdot 10) = -0{,}0230769 = -23{,}08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = \frac{70 \cdot 10^{-4}}{(1-0{,}3^2)} \cdot [10 - 0{,}3 \cdot 6] = +63{,}08 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot 2 \cdot \varepsilon_{xy} = \frac{70}{1{,}3} \cdot 6{,}928 \cdot 10^{-4} = 37{,}30 \text{ MPa}$$

Tensões Principais

$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = 20 \pm 56{,}98$$

$\sigma_1 = 76{,}98$ MPa $\qquad \sigma_3 = 0$ (EPT)

$\sigma_2 = -36{,}98$ MPa

Logo $\sigma_1 = 76{,}98$ MPa $\sigma_2 = 0$ MPa $\sigma_3 = -36{,}98$ MPa

- Critério Tresca:

$|\sigma_1 - \sigma_3| = 76{,}98 - (-36{,}98) = +113{,}96$ MPa $< \sigma_e = 120$ MPa

OK! ponto seguro

- Critério Von Mises

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2}$$

$= 100{,}7$ MPa $< \sigma_e = 120$ MPa OK! Ponto seguro

Politécnica
UFRJ

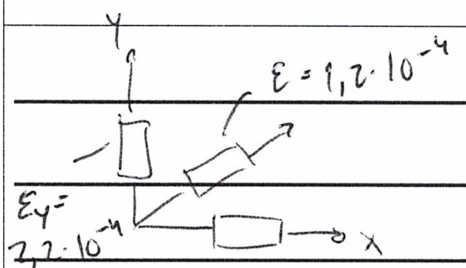
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.

Edital n° 377, de 25 de maio de 2022.	DOU n° 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	U4A8RX

RESPOSTA QUESTÃO 3



$\varepsilon_x = -2{,}2\cdot10^{-4}$

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cdot\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\cdot \text{sen}\, 2\theta$$

Para $\theta = 45°$ $\varepsilon_{x'x'} = +1{,}2\cdot10^{-4}$, substituindo

$$1{,}2\cdot10^{-4} = \frac{1}{2}(\underbrace{-2{,}2+2{,}2}_{0})\cdot10^{-4} + \frac{1}{2}(-2{,}2-2{,}2)\cdot10^{-4}\cdot\underbrace{\cos 90°}_{0} + \varepsilon_{xy}\cdot\text{sen}\, 90°$$

$\varepsilon_{xy} = +1{,}2\cdot10^{-4}$ //

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cdot\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\cdot\text{sen}\, 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'x'} = -2{,}2\cdot10^{-4}\cdot\cos 2\theta + 1{,}2\cdot10^{-4}\cdot\text{sen}\, 2\theta$$

Deformações principais:

$$\frac{\partial \varepsilon_{x'x'}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow +2{,}2\cdot10^{-4}\cdot2\cdot\text{sen}\, 2\theta + 1{,}2\cdot10^{-4}\cdot2\cdot\cos 2\theta = 0$$

$\text{tg}\, 2\theta_p = -\frac{1{,}2}{2{,}2}$ $\quad 2\theta_p = -28{,}61°$

$\theta_p = -14{,}305°$ //

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	U4A8RX

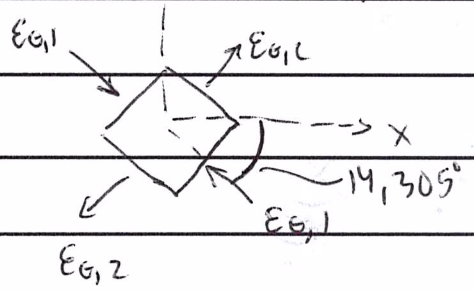
RESPOSTA QUESTÃO (CONTINUAÇÃO 3)

$\varepsilon_{x'x'}(\theta=\theta_p) = -2{,}2\cdot10^{-4}\cdot\cos(-28{,}61°) + 1{,}2\cdot\text{sen}(-28{,}61°)$

$\varepsilon_{\theta,1} = -2{,}506\cdot10^{-4}\,S$ //

$\varepsilon_{\theta,1} + \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0$ } def. principais

$\varepsilon_{\theta,2} = -\varepsilon_{\theta,1} = +2{,}506\cdot10^{-4}\,S$ //

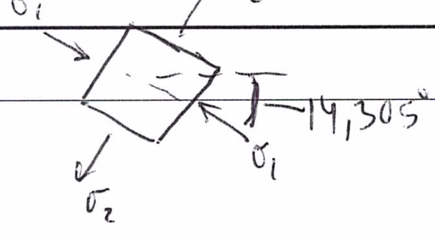


$\sigma_1 = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_{\theta,1} + \nu\cdot\varepsilon_{\theta,2}\right) = -38{,}55\ \text{MPa}$

$\sigma_2 = \dfrac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_{\theta,2} + \nu\,\varepsilon_{\theta,1}\right) = +$ 38,55 MPa

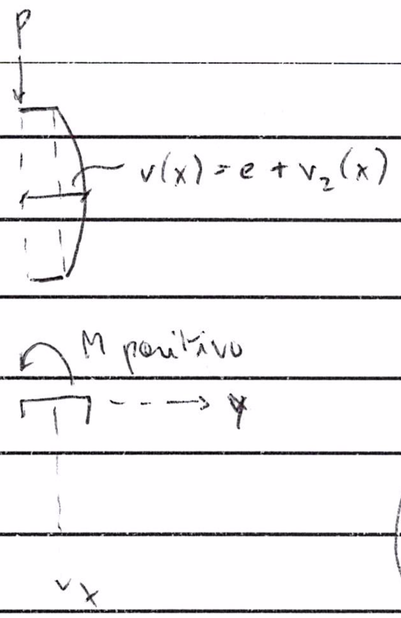
$\tau_\theta = 0$ (tensão cisalhamento nula nos planos principais)

As direções das tensões principais são as mesmas das deformações principais



PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO UYA8RX

RESPOSTA QUESTÃO 4



$$M(x) = +P\cdot v(x) = +P\left[e + v_2(x)\right]$$

$$EI\,v'' = -M(x)$$

$$EI\,\frac{d^2}{dx^2}\left[e + v_2(x)\right] = -Pe - Pv_2(x)$$

$$EI\,v_2'' = -Pe - Pv_2$$

$$\left(\text{pois } e = \text{cte} \ \left(\frac{de}{dx} = 0\right) \quad v_2'' = d^2v_2/dx^2 \right)$$

Definindo $K^2 = P/EI$

$$v_2'' + K^2 v_2 = -K^2 e$$

com CC1: $\begin{cases} v_2(x=0) = 0 \\ v_2(x=L) = 0 \end{cases}$

A solução da equação diferencial será:

$$v_2(x) = \underbrace{C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx}_{\text{solução homogênea}} \underbrace{- e}_{\text{solução particular}}$$

Aplicando $v_2(x=0) = 0 \Rightarrow C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 - e = 0$

$$\boxed{C_2 = e}$$

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	UYA8RX

RESPOSTA QUESTÃO (CONTINUAÇÃO 4)

Aplicando CC $v_2(x=L)=0$

$$C_1 \cdot \operatorname{sen} kL + e\left[\cos(kL)-1\right]=0$$

$$C_1 = \frac{e\left[1-\cos(kL)\right]}{\operatorname{sen} kL} = e\cdot tg\left(\frac{kL}{2}\right)$$

Logo a solução será:

$$v_2(x) = e\left[tg\left(\frac{kL}{2}\right)\cdot \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1\right]$$

$$v(x) = v_2(x) + e = e + e\left[tg\left(\frac{kL}{2}\right)\cdot \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1\right]$$

Em $x = L/2$

$$v(x=L/2) = e + v_2(x=L/2)$$

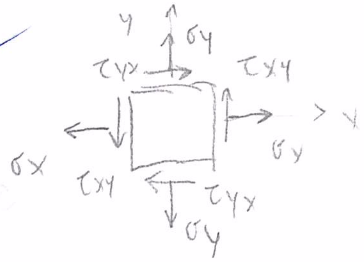
$$v(x=L/2) = e + e\left[tg\left(\frac{kL}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{kL}{2}\right) + \cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1\right]$$

$$v(x=L/2) = e + e\left[\frac{\operatorname{sen}^2(kL/2) + \cos^2(kL/2) - \cos(kL/2)}{\cos(kL/2)}\right]$$

$$v(x=L/2) = e + e\left[\frac{1}{\cos(kL/2)} - 1\right] = e\cdot \sec\left(\frac{kL}{2}\right)$$ //

UYA8RX

TENSÕES EM PLANOS INCLINADOS



τ_{xy} → normal do plano em que atua
↳ direção que atua

$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$

convenção ⊕

$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \cdot \sin^2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$

$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xy} \cdot (\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$\sigma_\theta > 0$ $\quad$ $\tau_\theta > 0$ $\quad$ $\tau_\theta < 0$

$\tau_\theta = -\tau_{\theta'}$

$(\theta' = \theta + \pi/2)$

$\tau_\theta = -\tau_{xy}$

$\tau_{\theta'} = +\tau_{yx}$

$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$

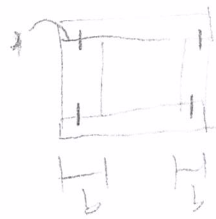
$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\theta - \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$

σ_θ, σ_θ, σ_θ $\quad$ 45° $\quad$ $\tau = \sigma_\theta$

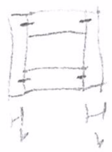
$\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = \text{cte} = \sigma_x + \sigma_y$

σ_x, σ_x — uniaxial $\quad$ σ_x, σ_y — biaxial

Cisalhamento



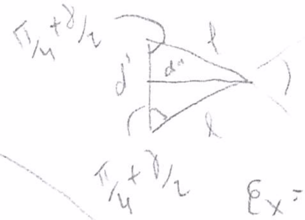
$\tau = \frac{Q\, m_y}{I_y \cdot (2b)}$



$\tau = \frac{V m}{(2) I_y}$

$\Delta d = \varepsilon_x d$

$\Delta d = \gamma d/2$



$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma ...$

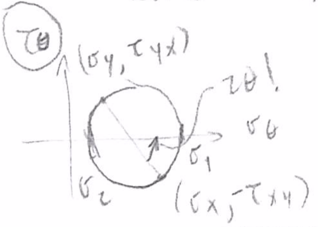
$G = ...$

Círculo de Mohr

$(\sigma_\theta - \sigma_{med})^2 + \tau_\theta^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ → raio

centro → (a, b)



$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$

$\tau_{máx} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

EPT – $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$ $\quad$ $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$ $\quad$ $\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ $\quad$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$\sigma_z = 0$ $\quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$ $\quad$ $\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$

EPD – $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$

apenas ε_x, ε_y e γ_{xy}

$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

variação de volume $\quad e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$