EDG4RA

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA

CONCURSO DE PROVAS E TÍTULOS DO MAGISTÉRIO SUPERIOR

EDITAL N° 377 DE 25/05/2022, PUBLICADO NO DOU N° 102 DE 31/05/2022

DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS – SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS – VAGA MC-024

QUESTÕES - PROVA ESCRITA

Conforme o Inciso III do Artigo 35 da Resolução n° 15/2020 do CONSUNI, seguem as questões da Prova Escrita:

1. **(PONTO 7)**

Considere a viga composta de uma matriz de resina com cabos de aço em seu interior, conforme mostrado na figura 1. O ensaio de tração da resina também é indicado na figura 1, assim como a disposição dos fios de aço na seção transversal da viga.

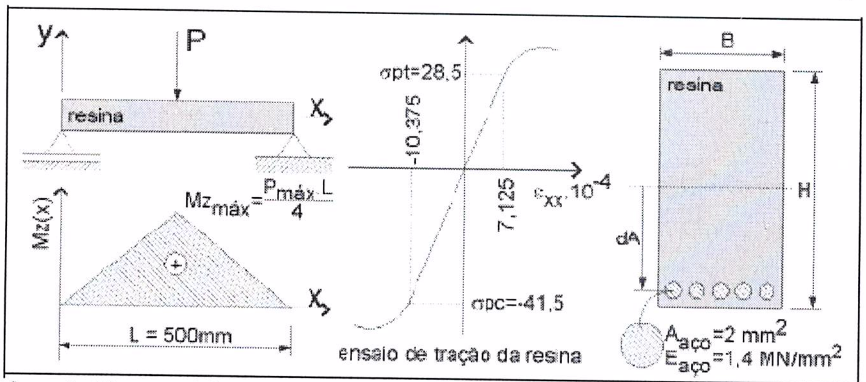


Figura 1 – Viga de múltiplos materiais, ensaio de tração da resina e cabos de aço no interior.

O objetivo do projeto é fazer com que haja um aproveitamento máximo das propriedades mecânicas da resina. Deseja-se que, quando ocorrer o carregamento máximo, a resina esteja simultaneamente sujeita à sua máxima tensão de compressão na parte superior (41,5 N/mm^2), e à sua máxima tensão de tração na parte inferior (28,5 N/mm^2).

Pode-se ajustar a posição da linha neutra para que essas duas tensões ocorram na resina, como mostrado na figura 2. Por meio da introdução de fios de aço pode-se levantar ou abaixar a posição da linha neutra.

Dados: **H** = 70 mm, **B** = 30 mm e **dA** = 32 mm, qual o número de fios de aço a serem adicionados para que esse requisito de projeto seja satisfeito? Nesta situação, qual a carga **P$_{máx}$** que a viga pode suportar, e quais são as tensões máximas atuantes no aço?

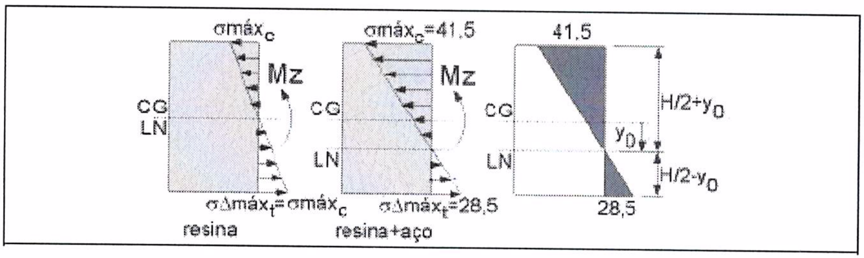


Figura 2 – Posição da linha neutra para que as tensões atuem simultaneamente.

EDE 4RA

$$\left\{\begin{array}{c}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}$$

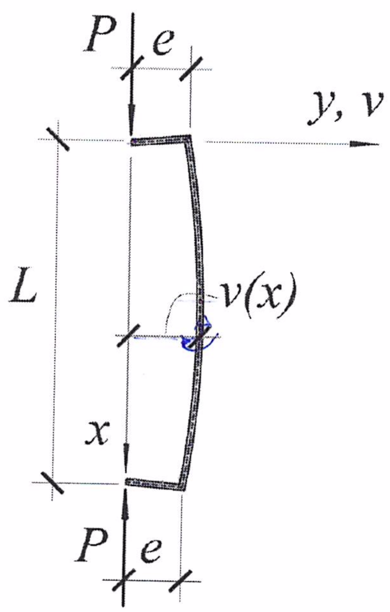
Equações constitutivas no Estado Plano de Tensão

EDE4RA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA

Politécnica UFRJ

4. **(PONTO 11)**



Considere a coluna excentricamente comprimida da figura ee a teoria clássica das vigas. P é a força normal e e é o valor das excentricidades em ambas extremidades. A origem do sistema de coordenadas xy é definida no ponto de aplicação da força na extremidade superior. A posição da deformada elástica na direção y é representada por $v(x)$. O comprimento da coluna é L, o módulo de elasticidade do material é E e o momento de inércia da seção transversal da coluna é I.

Pede-se

estabelecer a equação diferencial da deformada $v(x)$ e a forma geral da solução,

determinar as constantes a partir de condições de contorno,

apresentar a expressão final da deformada $v(x)$; e

determinar a excentricidade $v(L/2)$, em $x = L/2$.

Sugestões: Podem ser adotadas outras convenções de sinais, mas considerando o momento fletor como $M = -\int_A \sigma y \, dA$ tem-se $d^2v/dx^2 = M/EI$ e $M(0) = M(L) = -Pe$.

EDE4RA

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad \tau_c = \frac{VQ}{Ib} \qquad \tau_T = \frac{T\rho}{I_p} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \overbrace{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}}^{R \,=\, \tau_{máx} \,=\, \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \qquad \operatorname{sen} 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0 \qquad \varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\frac{\gamma_{x_1 y_1}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \qquad \frac{\gamma_{máx}}{2} = \left[\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{y_1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \qquad \varepsilon_{1,2} \approx \sigma_{1,2}$$

PROVA ESCRITA 05/12/2022

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO: EDE4RA

RESPOSTA QUESTÃO 1

Observa-se que a viga em questão está submetida a flexão composta reta, considerando o diagrama de tensão normal na seção transversal para a resina. Portanto, atuam na seção um momento fletor M, devido à carga P e ao momento despertado pela excentricidade dos cabos ($M = M_P + M_{cabos}$), e um esforço normal N de compressão, em razão da reação dos cabos ao alongamento imposto pela deformação da resina. Da Resistência dos Materiais, sabe-se que a posição da linha neutra é dada por $y_{LN} = \frac{-N \cdot I}{MA}$, na qual I é o momento de inércia da seção transversal e A é a área da seção transversal. Também pode-se calcular a tensão normal em qualquer fibra da seção aplicando a expressão para flexão composta reta $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I}$. As duas equações anteriores são empregadas para montar um sistema em M e N:

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EBE4RA

RESPOSTA QUESTÃO 1

y_{LN} → Use semelhança de triângulos: $y_{LN} = 6,5$ mm

(obs: eixo y aponta para baixo).

I → seção retangular: $I = bh^3/12 = (30)(70)^3/12 = 857500$ mm^4

A → área da seção retangular: $A = bh = (30)(70) = 2100$ mm^2

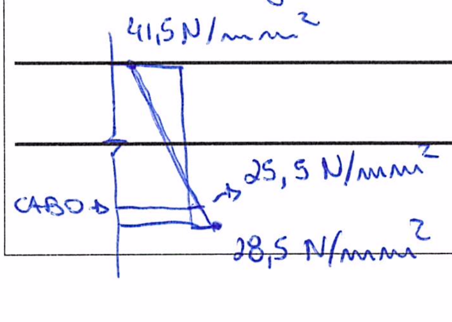
σ_i → tensão no bordo inferior: $\sigma_i = 28,5$ N/mm^2

y_i → coordenada vertical do bordo inferior: $y_i = 35$ mm

$$\begin{cases} M A y_{LN} + N I = 0 \\ \dfrac{M y_i}{I} + \dfrac{N}{A} = \sigma_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13650\, M + 857500\, N = 0 \\ 4,081633 \times 10^{-5}\, M + 4,761905 \times 10^{-4}\, N = 28,5\ N/mm^2 \end{cases}$$

Portanto, $M = 857500$ Nmm e $N = -13650$ N.

Assumindo a perfeita aderência entre a resina e o aço, ~~xxxx~~ a deformação específica será igual para ambos na cota $y = d_A = 32$ mm. Por semelhança de triângulos, conclui-se que, no nível dos cabos, $\sigma_{resina} = 25,5$ N/mm^2. Empregando a



PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE 4RA

RESPOSTA QUESTÃO 1

Lei de Hooke $\sigma = E\varepsilon$, o que é possível pela suposição de os materiais serem lineares elásticos, calcula-se a deformação dos cabos $\varepsilon_c = \sigma_{resina} / E_{resina}$. Do gráfico apresentado na Fig. 1, conclui-se que $E_{resina} = \frac{28,5 \ N/mm^2}{7,125 \times 10^{-4}}$

$E_{resina} = 40\,000 \ N/mm^2$, implicando em

$\varepsilon_c = \frac{25,5 \ N/mm^2}{40\,000 \ N/mm^2} = 6,375 \times 10^{-4}$. Com esta deformação, emprega-se a lei de Hooke para um cabo, a fim de calcular a tensão σ_c à qual está submetido: $\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c = 1,4 \ \frac{MN}{mm^2} \cdot 6,375 \cdot 10^{-4}$

$\sigma_c = 892,5 \ N/mm^2$. Assim, a força atuando em um cabo é dada por $F_c = \sigma_c \cdot A_c = 892,5 \ \frac{N}{mm^2} \cdot 2 \ mm^2 = 1785 \ N$.

Conforme visto anteriormente, o esforço normal deve ter intensidade de 13 650 N (compressão). Portanto, a quantidade de cabos necessária para atender o requisito de projeto é $n = 13\,650 N / 1785 N = 7,65$ cabos, que arredondando fica $n = 8$ cabos.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE 4RA

RESPOSTA QUESTÃO 1

Com o objetivo de definir a carga máxima $P_{máx}$, assume-se $n = 7{,}647$, a fim de atender rigorosamente o enunciado. O momento que atua na seção considerada possui uma parcela devida a $P_{máx}$ e outra devida aos cabos: $M = M_p - |N| \cdot dA$. Observa-se que a parcela associada aos cabos é negativa, em razão de as fibras inferiores serem comprimidas pelos cabos. Portanto, $M_p = M + |N| \cdot dA$

$M_p = 857500\ Nmm + (+13650)N \cdot 32\ mm = 1294300\ Nmm.$

Por fim, do enunciado tem-se $M_p = \frac{P_{máx} \cdot L}{4} \rightarrow P_{máx} = \frac{4 M_p}{L}$

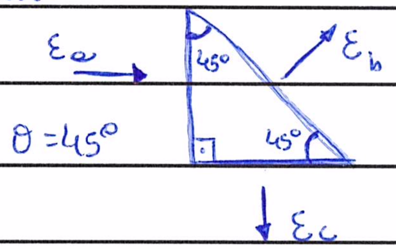
$\rightarrow P_{máx} = \frac{4 \times 1294300}{500} = 10354{,}4\ N.$

Resumindo:
- quantidade de cabos para o projeto: $7{,}65 \approx 8$
- $P_{máx} = 10354{,}4\ N$
- Tensões máximas no aço: $\sigma_c = 892{,}5\ N/mm^2$.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE 4RA

RESPOSTA QUESTÃO 3

No escopo da análise de tensões e deformações, nota-se que as medidas de deformação apresentadas podem ser representadas num elemento triangular conforme dado a seguir:



A fim de se obter a deformação ε_{xy} (metade da deformação de cisalhamento), emprega-se a fórmula de deformações em planos inclinados; sabendo que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_c$ e $\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_b$:

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\rightarrow 0{,}00012 = (\emptyset) + (-0{,}00022) \cos 90° + \varepsilon_{xy} \operatorname{sen} 90°$$

$$\boxed{0{,}00012 = \varepsilon_{xy}}$$

Portanto, as deformações no sistema de coordenadas xy podem ser representadas por: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a = -0{,}00022$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_c = +0{,}00022$ e $\varepsilon_{xy} = +0{,}00012$.

Politécnica
UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.

Edital n° 377, de 25 de maio de 2022. | DOU n° 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO**
	EDE 4RA

RESPOSTA QUESTÃO 3

Conhecendo o estado de deformação do ponto considerado, as deformações principais podem ser calculadas empregando as equações clássicas da mecânica dos materiais:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} \pm \left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\frac{\gamma_{máx}}{2} = \left[\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_{xy}\right)^2\right]^{1/2}$$

deformações principais

Logo

$$\varepsilon_1 = \left[\left(0{,}00022\right)^2 + \left(0{,}00012\right)^2\right]^{1/2} = +2{,}506\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = -2{,}506\times10^{-4}$$

(deformações normais)

$$\gamma_{máx} = 5{,}012\times10^{-4}$$ (deformação de cisalhamento)

As direções das deformações principais podem ser calculadas por meio da equação $\operatorname{sen}(2\theta_{p1}) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\gamma_{máx}}$, na qual θ_{p1} é o ângulo do plano de deformação principal com a horizontal.

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.

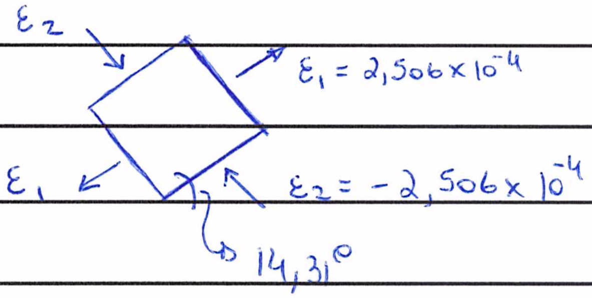
Edital nº 377, de 25 de maio de 2022. DOU nº 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE 4RA

RESPOSTA QUESTÃO 3

$$\text{sen}\,(2\theta_{p_1}) = \frac{2 \cdot 0{,}00012}{5{,}012\times10^{-4}} = 0{,}47885 \Rightarrow \theta_{p_1} \approx 14{,}31^\circ$$

Uma vez que as direções principais são perpendiculares entre si, o ângulo com a horizontal que a segunda direção faz é $\theta_{p_2} = \theta_{p_1} + 90^\circ = 104{,}31^\circ$. Desta forma, pode-se resumir as deformações principais no elemento a seguir:



Cabe observar que $\gamma_{máx}$ se manifesta num elemento girado de $\theta_1 + 45^\circ = 59{,}31^\circ$ com a horizontal.

Para calcular as tensões principais, primeiro faz-se a conversão do estado de deformação para o estado de tensão, aplicando:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \text{ com } \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

P7

Politécnica UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
SETOR DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Concurso Público para provimento efetivo de vagas no cargo de Professor da Carreira de Magistério Superior – MC-024.

Edital nº 377, de 25 de maio de 2022. DOU nº 102, de 31 de maio de 2022.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO**
	EDE4RA

RESPOSTA QUESTÃO 3

resulta em $\sigma_{xx} = -33,85$ MPa, $\sigma_{yy} = 33,85$ MPa e $\tau_{xy} = 18,46$ MPa

Analogamente ao calculado para deformações, as tensões principais são definidas por:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_1 = 38,56$ MPa, $\sigma_2 = -38,56$ MPa e $\tau_{máx} = 38,56$ MPa.

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que as direções das tensões principais coincidem com aquelas das deformações principais.

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE4RA

RESPOSTA QUESTÃO 4

Da teoria clássica de vigas, sabe-se que a equação da linha elástica, para momento fletor, é dada por $EIv'' = M$, na qual $v'' = d^2v/dx^2$, conforme sistema de eixos do enunciado da questão. Observando que o momento fletor numa seção qualquer da coluna é dado por $M = -P(e+v)$, conclui-se que $EIv'' = -P(e+v)$. Adotando um parâmetro k auxiliar, de modo que $k^2 = P/EI$, a equação diferencial pode ser reescrita como $v'' + k^2 v = -k^2 e$. Deve ser observado que esta é uma equação diferencial heterogênea e, portanto, apresenta solução particular dada por $v(x) = -e$. Sendo assim, a forma geral da solução assume a forma $v = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx - e$.

Aplicando as condições de contorno, pode-se calcular as constantes C_1 e C_2:

$v(0) = C_2 - e = e \therefore \boxed{C_2 = 2e}$

PROVA ESCRITA 05/12/2022	CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO
	EDE4RA

RESPOSTA QUESTÃO 4

$v(L) = C_1 \,\text{sen}\, kL + C_2 \cos kL - e = e$

$\Rightarrow C_1 \,\text{sen}\, kL + 2e \cos kL = 2e$

$\therefore \boxed{C_1 = \dfrac{2e(1-\cos kL)}{\text{sen}\, kL}}$

Portanto, a expressão final da deformada $v(x)$ fica

$v(x) = e\left(\dfrac{2(1-\cos kL)}{\text{sen}\, kL} \cdot \text{sen}\, kx + 2\cos kx - 1\right).$

Em $x = L/2$, a excentricidade vale

$v\left(\frac{L}{2}\right) = e\left(\dfrac{2(1-\cos kL)}{\text{sen}\, kL} \cdot \text{sen}\left(\frac{kL}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1\right).$